

# Messunsicherheit bei der Best-Einpassung von Lochbildern

## Methoden zur Best-Einpassung und zur Unsicherheitsermittlung

Dr.-Ing. M. Hernla, Dortmund

### Kurzfassung

Zur **Best-Einpassung** der Position von Bohrungen in Lochbildern stehen drei Methoden zur Verfügung: Gauß, **Minimax-Bedingung** (Tschebyschew) und  $L_1$ -Norm. Zur Ermittlung der Messunsicherheit gibt es bisher keine systematische Untersuchung. Hier werden ein analytischer Ansatz, **die Differenzenmethode** und die numerische Simulation (Monte Carlo) gegenübergestellt. Am Ende werden Empfehlungen für die Auswahl der geeigneten Methode abgeleitet.

### Abstract

For the best-fit of hole positions in patterns three methods are available: Gauss, Minimax-Requirement (Chebycheff) and  $L_1$ -Norm. The determination of the measurement uncertainty is not yet systematically surveyed **until today**. In this manuscript, an analytical approach, **the differences method** and the numerical simulation with Monte-Carlo-Methods are compared. At the end, recommendations for the selection of the methods **are** given.

### 1. Einleitung

Die Bestimmung der Position von Bohrungen in Lochbildern ist eine der häufigsten Messaufgaben in der industriellen mechanischen Fertigung – unabhängig vom Herstellverfahren. Ziel ist dabei die Erfüllung der Funktion, d.h. die Paarungs- oder Passfähigkeit mit einem oder mehreren Gegenständen. Die geometrische Produktspezifikation wird auf der technischen Zeichnung vorgegeben. Grundsätzlich gibt es dafür zwei Möglichkeiten:

- Positionstoleranz nach ISO 1101 [1] mit einem Bezugssystem nach ISO 5459 [2]
- Kombinierte Toleranz **nach** ISO 5458 [3] ohne oder mit unvollständigem Bezugssystem

Die Positionstoleranz im Bezugssystem hat den Vorteil, immer eindeutige Messergebnisse zu liefern. Die Messunsicherheit kann nach den bekannten Methoden [4] [5] [6] [7] bestimmt werden. Die Funktionsanforderungen lassen sich aber in vielen Fällen besser durch die kombinierte Toleranz für ein Lochmuster beschreiben.

Die Ist-Positionen können mit verschiedenen Methoden zur Nennlage eingepasst werden:

- Kleinste Summe der Abweichungsquadrate, Best-Einpassung nach Gauß
- Kleinste maximale Abweichung, Minimum- oder Minimax-Bedingung nach Tschebyschew
- Kleinste Summe der Abweichungsbeträge,  $L_1$ -Norm oder minimales Volumen

Alle drei Methoden liefern unterschiedliche Messergebnisse, die mehr oder weniger gut die Funktionseigenschaften beschreiben. Für jedes Messergebnis nach einer dieser Methoden muss aber auch eine Messunsicherheit angegeben werden. Hier sollen drei Möglichkeiten zur Unsicherheitsermittlung untersucht werden:

- Analytischer Ansatz analog zu [6] [7]
- [Differenzenmethode](#) nach DIN 1319 Teil 3 [Anhang B](#) [8]
- Numerische Simulation nach GUM Supplement 1 (Monte-Carlo-Methode) [9]

Zudem wird die Anwendung der Methoden zur Best-Einpassung von Lochbildern diskutiert.

## 2. Positionstoleranzen mit Bezugssystem

Das Bild 1 a) zeigt ein einfaches Beispiel für die Tolerierung eines Lochmusters mit einer Positionstoleranz nach ISO 1101 [1] mit einem Bezugssystem nach ISO 5459 [2]. Die Ebene A sowie die beiden Bohrungen B und C bilden ein vollständiges Bezugssystem. Dabei bestimmt die Bohrung B den Ursprung des Bezugssystems in den beiden Koordinaten und C die Ausrichtung, d.h. die Drehung in der Ebene. Der Abstand der beiden Bohrungen ist variabel und deshalb mit Position in Richtung der direkten Verbindungslinie toleriert.

Die Wirkung der beiden Bezüge B und C ist im Bild 1 b) dargestellt. Der Abstand von C zu B ist variabel, aber nur in Richtung der direkten Verbindungslinie. Die anderen drei Bohrungen können dagegen in jeder beliebigen Richtung von Ihrer Nennlage abweichen. Deshalb ist hier die Position mit einer kreis- bzw. zylinderförmigen Toleranzzone toleriert (Bild 1 a).

Die Toleranzeintragung setzt voraus, dass das Gegenstück spielfrei in den beiden Bezügen aufgenommen wird. Ein Beispiel zeigt das Bild 1 c). Bei Kunststoff-Formteilen lässt sich das Prinzip leicht umsetzen, indem das Gegenstück z.B. scharfkantig und mit leichtem Übermaß ausgeführt wird und so in das Werkstück einschneidet. Die Praxis ist aber meist eine andere.

Der häufigste Funktionsfall ist, dass die beiden Bezüge zum Gegenstück Spiel haben und sich damit beide Teile auch in den Bezügen gegeneinander verschieben und verdrehen können. Das Spiel im Bezug B lässt sowohl eine horizontale Verschiebung der beiden Teile zueinander zu (Bild 2 a) als auch eine Drehung um den Bezug C (Bild 2 b). Zusätzlich erlaubt das Spiel im Bezug C eine Drehung um den Bezug B (Bild 2 c). Alle drei Wirkungen überlagern sich zu den resultierenden Toleranzzonen im Bild 2 d). Die Toleranzzone wird um so größer, je weiter die Nennlage von der Verbindungslinie B-C entfernt liegt.

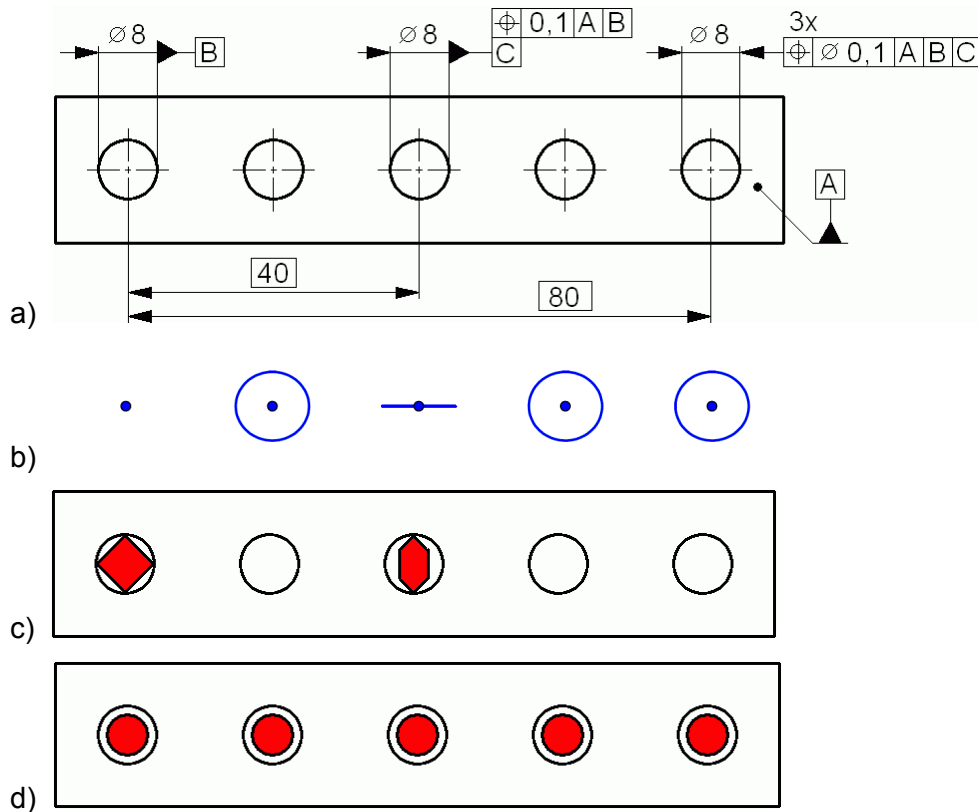


Bild 1: Positionstoleranz mit Bezugssystem; a) Zeichnungseintragung, b) Toleranzzonen, c) Gestaltung des Gegenstücks für die spielfreie Aufnahme, d) Paarung mit dem Gegenstück bei **gleichem** Spiel in allen Bohrungen

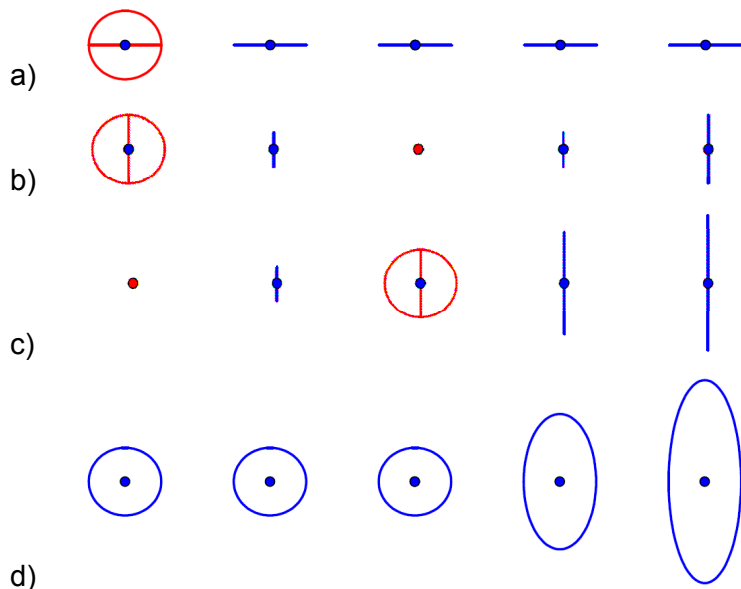


Bild 2: Wirkung der Spiels in den Bezügen; a) Horizontale Verschiebung mit Spiel im Bezug B, b) Drehung mit Spiel im Bezug B um Bezug C, c) Drehung mit Spiel im Bezug C um Bezug B, d) Resultierende Toleranzzonen

### 3. Positionstoleranzen ohne Bezugssystem

Das reicht allerdings nicht aus, um die Funktionsanforderungen zu beschreiben. Entsprechend der Gestaltung des Gegenstücks im Bild 1 d) müssten nämlich alle Abweichungen etwa auf derselben Seite der Toleranzzonen liegen wie im Bild 3 a). Dann lässt sich eine Position des Gegenstücks finden, in der alle Löcher passen. Liegt aber z.B. eine auf der anderen Seite (hier Bohrung 4), passt das Gegenstück nicht, obwohl alle Löcher in den resultierenden Toleranzzonen liegen, siehe Bild 3 b). Um die Pass- bzw. Paarungsfähigkeit der beiden Teile sicherzustellen, muss deshalb eine kombinierte Positionstoleranz mit dem Symbol "CZ" ohne Bezugssystem in die Zeichnung eingetragen werden, siehe Bild 3 c).

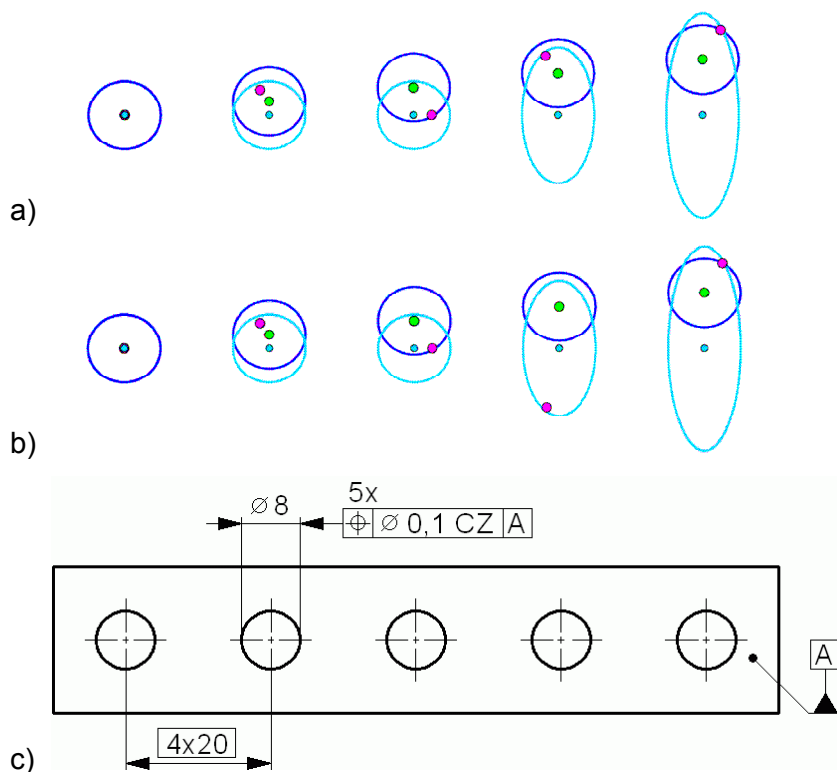


Bild 3: Resultierende Toleranzzone und Gegenstück; a) mit Abweichungen auf derselben Seite, b) mit einer Abweichung auf der anderen Seite, c) Kombinierte Toleranz

### 4. Best-Einpassung von Lochbildern

Die Ist-Positionen können **nach** verschiedenen mathematischen Methoden zur Nennlage eingepasst werden: Kleinste Summe der Abweichungsquadrate (Gauß), kleinste maximale Abweichung (Minimax, Tschebyschew) oder kleinste Summe der Abweichungsbeträge ( $L_1$ -Norm). Alle drei Methoden führen zu unterschiedlichen Ergebnissen, siehe Bild 4. Welche Methode standardmäßig anzuwenden ist, legen weder ISO 5459 noch ISO 1101 fest. In der

letzteren Norm heißt es in 8.2.2.3.1 lediglich, dass die Minimax-Bedingung nicht nur für Form, sondern auch für andere geometrische Eigenschaften verwendet werden kann. Das bezieht sich jedoch nur auf einzelne geometrische Elemente, nicht auf Elementgruppen wie Lochbilder. Damit ist schon die Norm und in der Folge auch die Zeichnung nicht eindeutig.

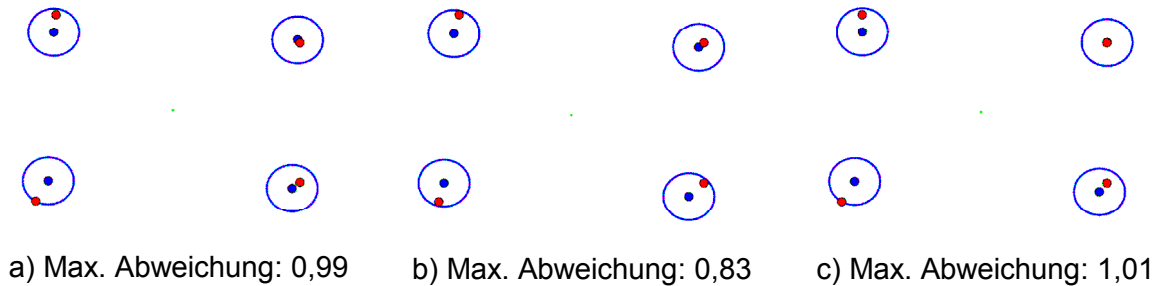


Bild 4: Best-Einpassung eines Lochbildes mit Toleranzzonen; a) Kleinste Summe der Abweichungsquadrate (Gauß), b) Kleinste maximale Abweichung (Minimax, Tschebyschew), c) Kleinste Summe der Abweichungsbeträge ( $L_1$ -Norm)

Die Minimax-Bedingung liefert die kleinste Abweichung, d.h. sie **ist** am besten geeignet, die Paarungsfähigkeit des Werkstücks zu bewerten. In der Praxis wird **meist** nach Gauß eingepasst, weil die Methode mathematisch am einfachsten handhabbar ist und erfahrungsgemäß zu den kleinsten Messunsicherheiten führt. Die  $L_1$ -Norm liefert die größten Abweichungen und ist damit am wenigsten geeignet, die Funktion anzubilden.

## 5. Best-Einpassung nach Gauß

Das Prinzip ist denkbar einfach: Es wird die Verschiebung des Schwerpunktes der Ist-Positionen (P) zu den Nennlagen (N) aller  $i$  Bohrungsmittelpunkte (Anzahl  $n$ ) in den zwei Koordinaten ermittelt, und zusätzlich die Drehung des Lochmusters um diesen Schwerpunkt. Für die beiden Koordinatendifferenzen  $\Delta X$  und  $\Delta Y$  sowie die Winkeldifferenz  $\Delta W$  gilt:

$$\Delta X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{Pi} - x_{Ni} \quad \Delta Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{Pi} - y_{Ni} \quad \Delta W = \frac{\sum_{i=1}^n (w_{Pi} - w_{Ni}) * r_i}{\sum_{i=1}^n r_i^2} \quad (1)$$

Dabei sind  $r_i$  die radialen Abstände der einzelnen Bohrungsmitteln von ihrem Schwerpunkt. Sind die **beiden** Mittelpunktkoordinaten der Bohrungen unabhängig voneinander und ihre Standardunsicherheiten jeweils gleich groß ( $u_{xi}=u_{yi}=u_{Mi}$ ), gilt für die drei Messgrößen:

$$u_{\Delta XS} = u_{\Delta YS} = u_{MS} = \sqrt{\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n u_{Mi}^2} \quad \text{und} \quad u_{\Delta W} = \frac{u_{MS}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n r_i^2}} \quad (2)$$

Je mehr Bohrungen zu dem Lochmuster gehören, desto kleiner werden die Unsicherheiten. Alternativ kann die Unsicherheit auch durch numerische Simulation [9] oder nach DIN 1319 Teil 3 Anhang B [8] ermittelt werden. Sie soll hier als Differenzenmethode bezeichnet werden. Danach werden die Eingangsgrößen (hier die X- und Y-Koordinaten der einzelnen Bohrungsmittelpunkte) einzeln nacheinander um einen definierten Betrag  $\Delta x_i$  vergrößert und verringert, und die resultierenden Abweichungen der Messgrößen werden ausgewertet. So lassen sich nicht nur die Standardunsicherheiten, sondern auch die Kovarianzen bzw. Korrelationskoeffizienten der Messgrößen berechnen. Die Differenzenmethode arbeitet wesentlich schneller als die numerische Simulation, weil es für jede Eingangsgröße  $X_i$  nur zwei Werte gibt:  $x_i + \Delta x_i$  und  $x_i - \Delta x_i$ . Alle drei Methoden liefern dieselben Unsicherheiten. Zusätzlich lassen sich mit der Differenzenmethode die Sensitivitätskoeffizienten  $c_i$  und die Unsicherheitsbeiträge  $u_i(y)$  der einzelnen Bohrungsmittelpunktkoordinaten bestimmen. Dazu wird die Änderung  $\Delta y_i$  der Messgröße  $Y$  ins Verhältnis gesetzt zu der ursächlichen Änderung  $\Delta x_i$  der jeweiligen Eingangsgröße  $X_i$ . An die Stelle des Differentialquotienten  $\delta y_i / \delta x_i$  tritt der Differenzenquotient:

$$c_i = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \quad \text{und} \quad u_i(y) = c_i \cdot u(x_i) \quad (3)$$

Für den bei Gl. (2) angegebenen Sonderfall sind die Kovarianzen null, und der Streubereich des Schwerpunktes ist ebenfalls kreisförmig (Bild 5). Die Streubereiche der Mittelpunkte des eingepassten Lochmusters sind ellipsenförmig und tangential um den Schwerpunkt orientiert. Die großen Halbachsen werden mit **wachsendem** Abstand vom Schwerpunkt größer. Damit lässt sich die Unsicherheit des größten Abstandes berechnen, hier bei der Bohrung links unten. Sie hängt offensichtlich von der Richtung der Abweichung und der Orientierung der Streuungsellipse ab. In radialer Richtung zum Schwerpunkt ist die Standardunsicherheit gleich der des Schwerpunktes  $u_{MS}$  aus Gl. (2). Tangential hängt sie zusätzlich vom Abstand  $r$  der Bohrung vom Schwerpunkt ab (Bild 5 b). Zur Vereinfachung kann mit der größten Unsicherheit  $u_{\max}$  entsprechend der große Halbachse der Streuungsellipse gerechnet werden. Diese sind im Bild 5 als Kreise mit dünnen **blauen** Linien **um die Streuungsellipsen** dargestellt:

$$u_{\max} = u_{MS} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2} \quad \text{mit} \quad \bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \quad (4)$$

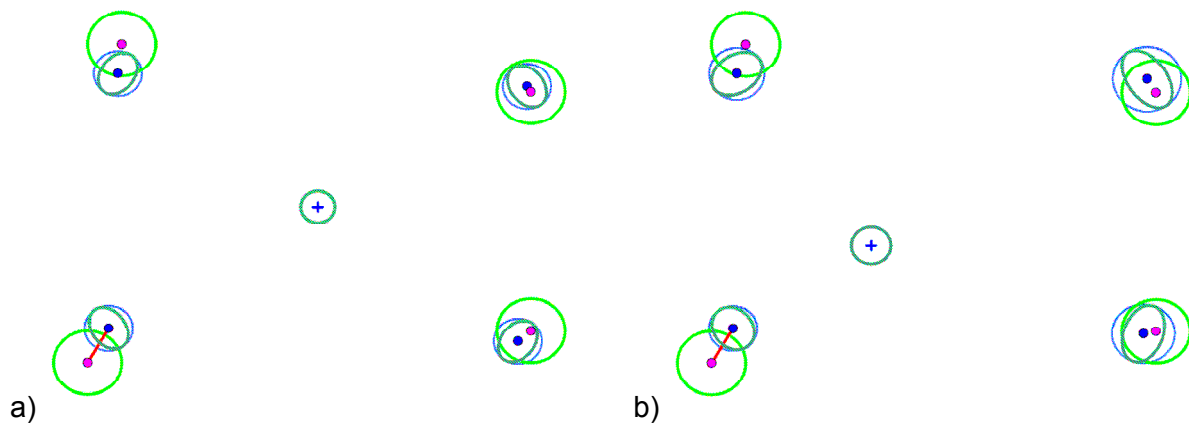


Bild 5: Best-Einpassung nach Gauß mit den Streubereichen der Mittelpunkte (hellgrün), des Schwerpunktes und des eingepassten Lochmusters (dunkelgrün) mit dem größtem Abstand; a) Einpassung mit vier Bohrungen, b) Einpassung mit drei Bohrungen

Bei der Modellbildung ist zu beachten, dass Koordinaten und Drehwinkel des Lochmusters aus den Ist-Positionen der Bohrungen berechnet wurden. Die Größen sind also voneinander abhängig, und die Unsicherheiten werden kleiner als bei unabhängiger Betrachtung.

## 6. Best-Einpassung nach Tschebyschew

Bei der Best-Einpassung werden drei Parameter ermittelt, zwei Schwerpunktkoordinaten und ein Winkel. Deshalb sind mindestens drei Bohrungen erforderlich, um drei Abweichungen zu berechnen. Zielfunktion ist die kleinste maximale Abweichung. Das bedeutet, dass dann die Abweichungen bei drei Bohrungen gleich groß sind (Bild 6). Die anderen Bohrungen spielen keine Rolle. Der Schwerpunkt und das eingepasste Lochmuster weisen ausgeprägte Streuungsellipsen auf, d.h. die Unsicherheiten sind stark richtungsabhängig. Hier wirken sich die Position der Bohrungen und die Richtung der Abweichungen aus.

Nach DIN 1319-3 sollen die Eingangsgrößen um einen Betrag  $\Delta x_i$  entsprechend der halben Standardunsicherheit  $u(x_i)$  variiert werden [8]. Damit ergeben sich jedoch zu große Unsicherheiten, wenn die Modellfunktion nicht linear ist. Im Vergleich mit der numerischen Simulation hat sich die dreifache Standardunsicherheit  $\Delta x_i = 3 \cdot u(x_i)$  als zweckmäßig herausgestellt.

Die Streuungsellipsen aus der Differenzenmethode und aus der Simulation sind im Bild 6 dargestellt. Beide sind stark richtungsabhängig, wobei sowohl die Lage der Bohrung als auch die Richtung der Abweichung eine Rolle spielen. Die Unterschiede sind sichtbar, aber als Näherung ist die Differenzenmethode gut geeignet. Die großen Halbachsen der Streuungsellipsen werden mit wachsendem Abstand vom Schwerpunkt größer (Bild 6 b).

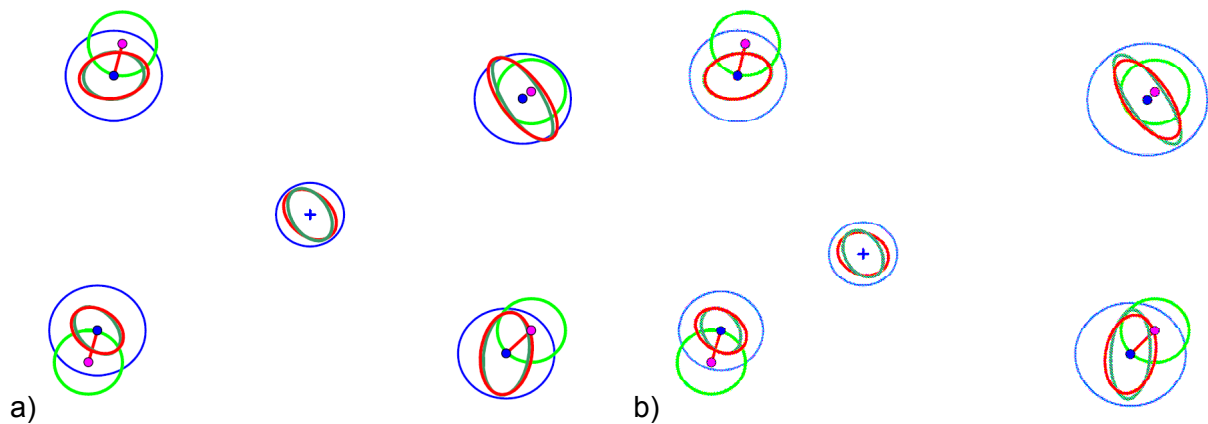


Bild 6: Best-Einpassung nach Tschebyschew mit den Streubereichen der Mittelpunkte (hellgrün), des Schwerpunktes und des eingepassten Lochmusters, jeweils mit der Differenzenmethode (dunkelgrün) und aus der Simulation (rot);  
 a) Schwerpunkt aus vier Bohrungen, b) Schwerpunkt aus drei Bohrungen

Die maximalen Standardunsicherheiten lassen sich wieder richtungsunabhängig mit Gl. (4) empirisch nach oben abschätzen. Hier wird für  $u_{MS}$  die mittlere Standardunsicherheit  $u_M$  der drei Bohrungsmittelpunkte eingesetzt, die für die Best-Einpassung benutzt wurden:

$$u_M = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_{Mi}^2} \quad \text{mit } n = 3 \quad (5)$$

Die maximalen Standardunsicherheiten sind im Bild 6 als Kreise mit dünnen blauen Linien um die Streuungsellipsen dargestellt.

## 7. Best-Einpassung nach $L_1$ -Norm

Hier tragen alle Bohrungen zur Best-Einpassung bei. Bei der Differenzenmethode wurde ein geringerer Einfluss des Variationsbetrages  $\Delta x_i$  festgestellt. Mit der dreifachen Standardunsicherheit  $\Delta x_i = 3 \cdot u(x_i)$  sind die Ergebnisse relativ nahe an der Simulation.

Die Streuungen des Schwerpunktes und des eingepassten Lochmusters weisen wieder ein ausgeprägtes Richtungsverhalten auf (Bild 7). Auch hier wirken sich die Position der Bohrungen und die Richtung der Abweichungen aus, aber anders als in den Bildern 5 und 6.

Die Streuungen sind wieder stark richtungsabhängig, wobei sowohl die Lage der Bohrung als auch die Richtung der Abweichung eine Rolle spielen. Im Unterschied zu den anderen Einpassmethoden werden die Unsicherheiten auch mit zunehmender Nähe zum Schwerpunkt der Bohrungsmittelpunkte größer (Bild 7 b). Sie sind aber mindestens fast doppelt so groß wie die Standardunsicherheiten der einzelnen Bohrungsmittelpunkte.



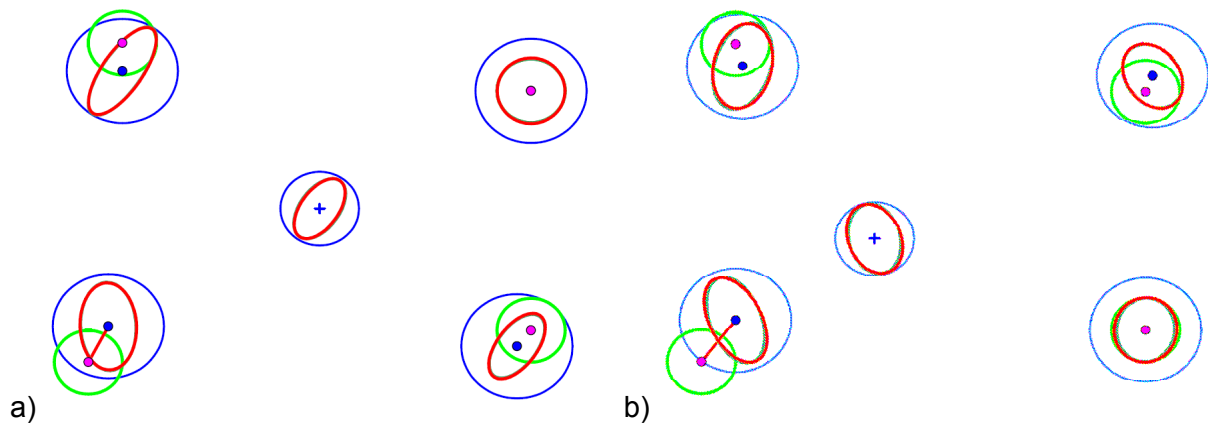


Bild 7: Best-Einpassung nach  $L_1$ -Norm mit den Streubereichen der Mittelpunkte (hellgrün), des Schwerpunktes und des eingepassten Lochmusters, jeweils mit der Differenzenmethode (dunkelgrün) und aus der Simulation (rot);  
 a) Schwerpunkt aus vier Bohrungen, b) Schwerpunkt aus drei Bohrungen

Die maximalen Standardunsicherheiten lassen sich wieder richtungsunabhängig empirisch nach oben abschätzen. Hier wird für  $u_M$  die verdoppelte mittlere Standardunsicherheit aller Bohrungsmittelpunkte nach Gl. (2) sowie der mittlere Radius  $\bar{r}$  nach Gl. (4) eingesetzt:

$$u_{MS} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n u_{Mi}^2} \quad \text{und} \quad u_{\max} = u_{MS} \cdot \text{Max} \left( \sqrt{2}; \sqrt{1 + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{r}{\bar{r}} \right)^2} \right) \quad (6)$$

Die maximalen Standardunsicherheiten sind im Bild 7 als Kreise mit dünnen blauen Linien um die Streuungsellipsen dargestellt.

## 8. Diskussion

Die Untersuchung der Messunsicherheiten bestätigt die Erfahrung, dass die Best-Einpassung nach Gauß (Methode der kleinsten Quadratesumme) die kleinsten Messunsicherheiten liefert. Je mehr Elemente beteiligt sind, desto kleiner wird die Messunsicherheit. Allerdings sind die Abweichungen größer als bei der Einpassung nach Tschebyschew (Methode der kleinsten maximalen Abweichung, Minimax-Bedingung). Es kann also vorkommen, dass die Einpassung nach Gauß eine Toleranzüberschreitung anzeigt, die Teile aber trotzdem passen. Die  $L_1$ -Norm mit den größten Abweichungen ist gar nicht zu empfehlen.

In Zeichnungen werden häufig Positionstoleranzen mit Bezugssystemen wie im Bild 1 a) eingetragen. Damit lassen sich die Abweichungen eindeutig bestimmen, z.B. um die Fertigung zu korrigieren. Das entspricht aber nicht der Funktion, wenn es bei den Bezügen

Spiel zum Gegenstück gibt. Dieses wird bei der Bewertung der Abweichungen in der Regel nicht berücksichtigt, d.h. es werden passende Teile fälschlich als fehlerhaft bewertet.

Bei Eintragung einer kombinierte Toleranz nach Bild 2 c) stehen für alle fünf Bohrungen kreisförmige Toleranzzonen zur Verfügung (Bild 2 a) und b) und nicht nur drei wie beim Bezugssystem (Bild 1 b). Die Gesamtfläche der Toleranzfelder wird also deutlich größer, und es gibt mehr Werkstücke innerhalb der Toleranz.

Im Sinne einer wirtschaftlichen Fertigung und Qualitätsprüfung kann man die Anteile der Werkstücke ermitteln, die entweder aufgrund der eingeschränkten Toleranzzonen bei der Messung im Bezugssystem oder aufgrund der größeren Abweichung bei Anwendung der Gauß-Methode gegenüber der Minimax-Bedingung fälschlich als fehlerhaft bewertet werden.

Die Frage lässt sich wieder mittels numerischer Simulation anhand des Beispiels aus Bild 1 bzw. 2 untersuchen. Dabei werden auf alle Fälle von Toleranzüberschreitungen im Bezugssystem nach Bild 1 b) noch einmal die Best-Einpassungen nach Gauß und nach Tschebyschew angewendet.

Bei der Simulation wurden verschiedene Verteilungen für die Abweichungen in den einzelnen Koordinaten untersucht, siehe Tabelle 1. Bei der Arcsin- und der Rechteckverteilung entspricht die Grenze des Streubereiches der Toleranzgrenze  $T/2$ . Bei der Normalverteilung wurden verschiedene Verhältnisse der Standardunsicherheit  $u$  zur Toleranzgrenze  $T/2$  benutzt. Der Wert  $u = T/6$  entspricht in der Fertigung einem Prozessfähigkeitsindex  $c_p$  bzw.  $c_{PK}$  von 1,00 und kommt deshalb der Realität in der Serienfertigung am nächsten.

Tabelle 1: Anteile von Toleranzüberschreitungen aus der Simulation für die Einpassung nach Gauß bzw. Tschebyschew, wenn die Toleranzen im Bezugssystem überschritten sind (100 %)

Verteilung	Standard- abweichung	nach Gauß- Einpassung	nach Tscheb.- Einpassung
Arcsin	$u = T/2 / \sqrt{2}$	47 %	15 %
Rechteck	$u = T/2 / \sqrt{3}$	27 %	3 %
Normal	$u = T/2$	78 %	61 %
	$u = T/4$	27 %	7 %
	$u = T/6$	7 %	0,4 %
	$u = T/8$	0,8 %	0 %

In allen Fällen ist der Verbesserungseffekt bei der Best-Einpassung nach Gauß gegenüber der Auswertung im Bezugssystem deutlich größer als bei Anwendung der Minimax-Methode gegenüber Gauß.

Die Zahlenangaben beziehen sich ausdrücklich auf das Beispiel. Der Verbesserungseffekt nimmt tendenziell mit zunehmender Anzahl von Bohrungen ab, weil dann der Anteil der Toleranzzonen der Bezüge an der Gesamtfläche der Toleranzfelder kleiner wird.

Die Betrachtungen lassen sich ohne weiteres auf die Bezugssysteme nach ISO 5459 [2] übertragen, wo die Minimax-Bedingung als Standard für die Bezugsbildung festgelegt ist.

## 9. Zusammenfassung

Die Zeichnungseintragung von Positionstoleranzen mit Bezugssystem entspricht dann nicht der Funktion, wenn es bei den Bezügen Spiel zum Gegenstück gibt. Dann können die Teile ihre gegenseitige Lage auch in den Bezügen ausgleichen. Diese Funktion wird besser durch eine kombinierte Toleranz (schwimmendes Lochmuster) beschrieben.

In diesem Fall müssen die Ist- zu den Nennpositionen der Bohrungen eingepasst werden. Dafür stehen drei gängige Methoden zur Verfügung, die zu unterschiedlichen Ergebnissen führen: Gauß, Tschebyschew und  $L_1$ -Norm. Eine Standardfestlegung gibt es nicht.

Zur Ermittlung der Unsicherheit stehen prinzipiell drei Methoden zur Verfügung: Analytisch, Differenzenmethode und numerische Simulation. Die beiden letzteren liefern ähnliche Ergebnisse, wenn bei der Differenzenmethode die Werte der Eingangsgrößen um den dreifachen Betrag der Standardunsicherheit variiert werden. Zusätzlich lassen sich damit die Sensitivitätskoeffizienten und die Unsicherheitsbeiträge der einzelnen Bohrungsmittelpunkt-kordinaten berechnen. Die Messunsicherheit der Gauß-Einpassung lässt sich leicht berechnen. Für die beiden anderen Methoden wurden einfache empirische Näherungen für die betriebliche Praxis vorgestellt.

Die Gauß-Methode liefert immer die kleinsten Messunsicherheiten und wird deshalb empfohlen. Die größeren Abweichungen gegenüber der Minimax-Methode nach Tschebyschew führen zu einem gewissen Anteil von Werkstücken, die allein aufgrund dessen als (fälschlich) fehlerhaft bewertet werden. Dieser ist jedoch deutlich kleiner als der (fälschliche) Fehleranteil aufgrund des nicht ausgenutzten Spiels in den Bezügen bei der Messung im Bezugssystem gegenüber der Einpassung nach Gauß.

## 10. Literatur

- [1] DIN EN ISO 1101: Geometrische Produktspezifikation (GPS) – Geometrische Tolerierung – Tolerierung von Form, Richtung, Ort und Lauf. Beuth Verlag Berlin 2017
- [2] DIN EN ISO 5459: Geometrische Produktspezifikation (GPS) – Geometrische Tolerierung – Bezüge und Bezugssysteme. Beuth Verlag Berlin 2013

- [3] DIN EN ISO 5458: Geometrische Produktspezifikation (GPS) – Geometrische Tolerierung – Elementgruppen und kombinierte geometrische Spezifikation. Beuth Verlag Berlin 2018
- [4] VDI/VDE 2617 Blatt 7: Genauigkeit von Koordinatenmessgeräten; Kenngrößen und deren Prüfung; Ermittlung der Unsicherheit von Messungen auf Koordinatenmessgeräten durch Simulation. Beuth Verlag Berlin 2008
- [5] VDI/VDE 2617 Blatt 8: Genauigkeit von Koordinatenmessgeräten; Kenngrößen und deren Prüfung; Prüfprozesseignung von Messungen mit Koordinatenmessgeräten. Beuth Verlag Berlin 2018
- [6] VDI/VDE 2617 Blatt 11: Genauigkeit von Koordinatenmessgeräten; Kenngrößen und deren Prüfung; Ermittlung der Unsicherheit von Messungen auf Koordinatenmessgeräten durch Messunsicherheitsbilanzen. Beuth Verlag Berlin 2011
- [7] Hernla, M.: Messunsicherheit bei Koordinatenmessungen. Ermittlung der aufgabenspezifischen Messunsicherheit durch Unsicherheitsbilanzen. expert verlag Renningen 2016
- [8] DIN 1319 Teil 3: Grundlagen der Messtechnik – Teil 3: Auswertung von Messungen einer einzelnen Messgröße; Messunsicherheit. Beuth Verlag Berlin 1996
- [9] JCGM 101: Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the “Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement” – Propagation of distributions using a Monte Carlo Method. Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), Sèvres 2008